Тема 5 Теория напряженного и деформированного состояния. Теория прочности

Тензор напряжений

Вектор напряжений p *является физическим объектом, имеющим длину, направление и точку приложения.* В этом смысле он обладает векторными свойствами. Однако этому объекту присущи некоторые свойства, не характерные для векторов. В частности, величина и направление вектора напряжений зависит от ориентации вектора n нормали бесконечно малого элемента поверхности dA.

Совокупность всех возможных пар векторов n *и* p *в точке определяет напряженное состояние в данной точке.*

Для полного описания напряженного состояния в точке нет необходимости задавать бесконечное множество направлений вектора n, достаточно определить векторы напряжений на трех взаимно перпендикулярных элементарных площадках (рис. 5.1, а). Напряжения на произвольно ориентированных площадках могут быть выражены через эти три вектора напряжений (рис. 5.1, б).

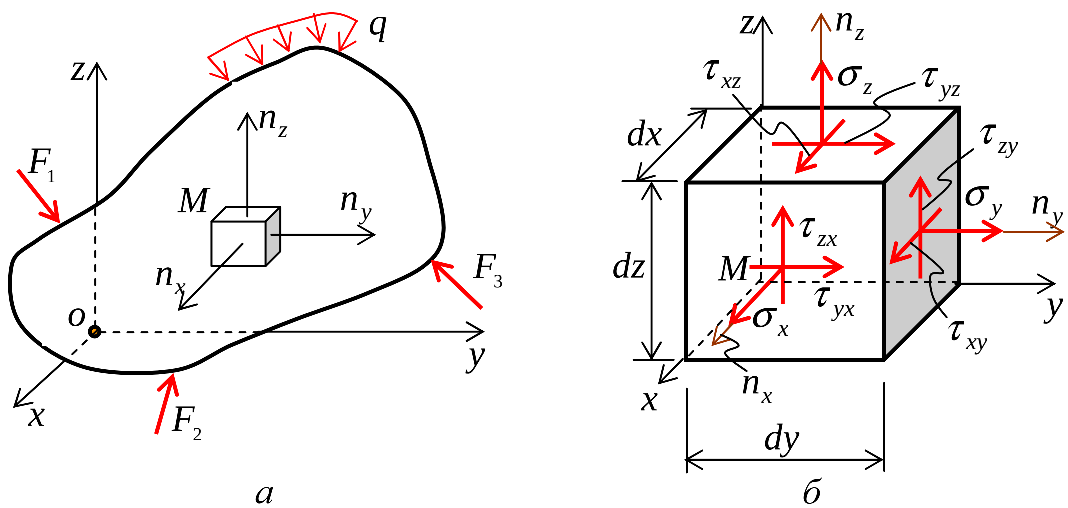

Рис. 5.1

Проведем через произвольно выбранную точку M нагруженного тела, находящегося в равновесии (рис. 5.1, а), три взаимно перпендикулярные плоскости с векторами нормалей, направления которых совпадают с направлениями координатных осей (рис. 5.1).

Элементарные площадки образуем дополнительными сечениями, параллельными исходным плоскостям и отстоящими от них на бесконечно малые расстояния dx, dy, dz. В результате в окрестности точки M получим бесконечно малый параллелепипед, поверхность которого образована элементарными площадками $dA_x = dy \cdot dz$, $dA_y = dz \cdot dx$, $dA_z = dx \cdot dy$.

Начало координат совместим с точкой M , а координатные оси направим вдоль соответствующих ребер, так чтобы грани параллелепипеда были перпендикулярны к направлениям координатных осей x, y, z (рис. 5.1, б).

Напомним, что такое выделение бесконечно малого параллелепипеда возможно только в пределах принятой раннее *гипотезы сплошной среды*, допускающей переход к предельно малым объемам, где напряженное состояние можно считать *однородным*.

Если размеры параллелепипеда уменьшать, он будет стягиваться в точку M , и в пределе все его грани проходят через эту точку. Поэтому напряжения по граням элемента рассматривают как напряжения в исследуемой точке M , но в различным образом ориентированных площадках.

Действующие по этим площадкам полные вектора напряжений разложим на составляющие вдоль координатных осей: одну по нормали к площадке (нормальные напряжения), и две в плоскости сечения (касательные напряжения) (рис. 5.1, б).

Нормальные напряжения обозначают буквами σ_x, σ_y, σ_z с индексами, обозначающими направление вектора нормали к площадке. Растягивающие напряжения σ_x, σ_y, σ_z будем считать положительными, сжимающие – отрицательными.

Касательные напряжения обозначают буквами с двумя индексами (τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} и т. п.), из которых первый указывает направление действия компоненты напряжения, второй – направление вектора нормали к площадке. Если направление внешней нормали (n_x, n_y, n_z) совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси, то положительные касательные напряжения направлены в сторону соответствующих положительных направлений координатных осей.

Положительные напряжения, возникающие на трех видимых взаимно перпендикулярных гранях элемента (на трех взаимно перпендикулярных плоскостях, проходящих через точку M) показаны на рис. 5.1, б. На невидимых гранях элемента возникают соответственно такие же напряжения, но противоположно направленные.

Система сил, приложенных к элементу, должна удовлетворять условиям равновесия. Поскольку на противоположных гранях возникают противоположные по направлению силы, то суммы проекций всех сил на оси x, y, z равны нулю, независимо от величины возникающих напряжений.

Осталось проверить, обращаются ли в нуль суммы моментов всех сил относительно осей x, y и z. Видно, что момент каждой продольной силы уравновешивается моментом противоположной продольной силы, расположенной на невидимой задней грани. Исключение составляют касательные силы. Например, для оси x условие равенства нулю суммы моментов соблюдается в том случае, если момент силы $\tau_{yz} \cdot dx \cdot dy$ равен моменту силы $\tau_{zy} \cdot dx \cdot dz$, т. е. $\tau_{yz} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \tau_{zy} \cdot dx \cdot dz \cdot dy$.

Аналогично могут быть записаны еще два уравнения равновесия. Тогда получаем $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Таким образом, *на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра*. Это и есть *закон парности касательных напряжений*, сформулированный в общем виде. Он справедлив для всех точек нагруженного тела, независимо от вида приложенных нагрузок и свойств материала. Следствием из условия парности касательных напряжений является то, что на гранях выделенного элемента (рис. 5.1, б) имеем не девять, а только шесть независимых компонентов напряжений, поскольку касательные напряжения попарно равны.

Т. о., напряженное состояние в точке определяется только 6 независимыми компонентами (числами) и в отличие от понятий числа, вектора (определяемого 3 числами) представляет собой некоторый физический объект, называемый *тензором напряжений* в точке.

Тензору в отличие от вектора не может быть дано простое геометрическое толкование. Его можно представить в виде матрицы (таблицы), симметричной относительно главной диагонали, соответствующим образом упорядочив девять компонент:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

Заметим, что из условия парности касательных напряжений вытекают и условия симметрии тензора напряжений.

Главные напряжения

При изменении ориентации граней выделенного элемента меняются также и действующие на его гранях напряжения. При этом можно выделить такие площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения принимают экстремальные значения.

Площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения – *главными напряжениями*.

В теории упругости доказывается, что как бы ни было загружено тело, в каждой его точке всегда можно выделить по крайней мере три главных площадки, причем они взаимно перпендикулярны.

Главные напряжения условимся обозначать σ_1, σ_2, σ_3; при этом должно выполняться неравенство $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, которое понимается в алгебраическом смысле. Например, $\sigma_1 = 60\ МПа$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -140\ МПа$.

Напряженное состояние, в котором только одно главное напряжение отлично от нуля, а два других равны нулю, называется *одноосным* или *линейным* (рис. 5.2, а).

Напряженное состояние, в котором два главных напряжения отличны от нуля, а одно равно нулю, называется *двухосным* или *плоским* (рис. 5.2, б).

Напряженное состояние, в котором все три главных напряжения отличны от нуля называется *трехосным* или *объемным* напряженным состоянием (рис. 5.2, в).

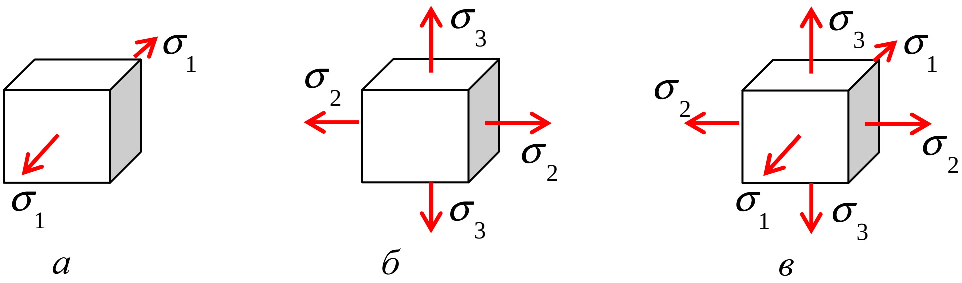

Рис. 5.2

Кроме того, различают *однородные* и *неоднородные* напряженные состояния. Напомним, что в *однородном* напряженном состоянии напряжения одинаковы в каждой точке какого-либо сечения и во всех параллельных ему сечениях. Например, при центральном растяжении.

В более полных курсах сопротивления материалов можно познакомиться со способами определения главных напряжений.

Обобщенный закон Гука

В дальнейшем нам понадобиться для изотропного тела знание зависимости между напряжениями и деформациями при плоском напряженном состоянии. В пределах малых деформаций эта зависимость является линейной и носит название обобщенного закона Гука.

Для того чтобы составить аналитическое выражение обобщенного закона Гука, воспользуемся принципом независимости действия сил и рассмотрим раздельно силы, возникающие на гранях элементарного параллелепипеда (рис. 5.3).

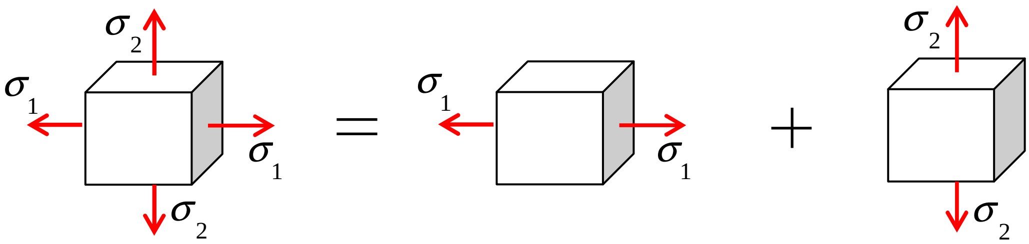

Рис. 5.3

Пусть его грани являются главными площадками. Под действием главных напряжений этот элементарных кубик деформируется. Поскольку интерес представляют деформации элемента, определяемые относительным смещением его точек, одно из торцевых сечений элемента можно считать неподвижным. Вычислим значения относительных деформаций ε_{11}, $\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}$. В результате воздействия σ_1 имеем $\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}$, $\varepsilon_{21} = -\mu\varepsilon_{11} = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$ (рис. 5.4, а).

Здесь принята двойная индексация относительно деформаций. Первый индекс указывает направление относительной деформации, а второй – причину деформации.

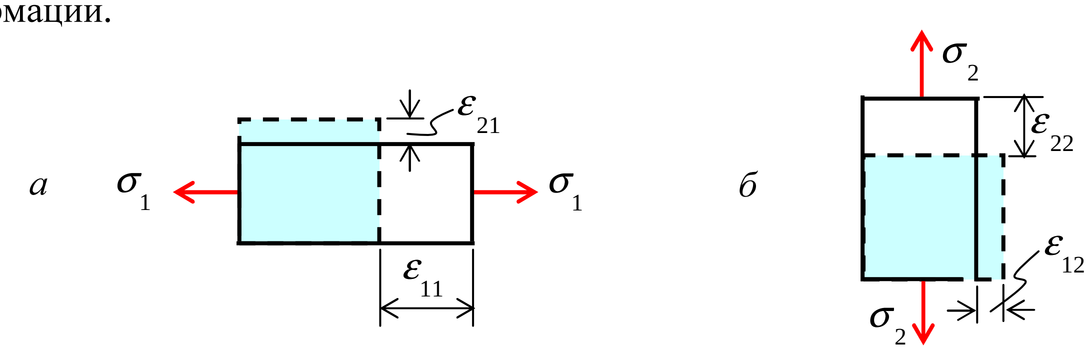

Рис. 5.4

Аналогично, в результате воздействия σ_2 имеем $\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_2}{E}$, $\varepsilon_{12} = -\mu\varepsilon_{22} = -\mu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$ (рис. 5.4, б).

Очевидно, что относительные деформации, вызванные одновременным воздействием напряжений σ_1 и σ_2, на основании принципа независимости действия сил будут равны $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \cdot \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \mu \cdot \sigma_2)$, и $\varepsilon_2 = \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} = -\mu \cdot \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \mu \cdot \sigma_1)$.

Аналогичные формулы можно получить и для случая, когда грани элементарного параллелепипеда не совпадают с главными площадками (т. е. когда по этим граням, кроме нормальных напряжений, действуют также и касательные). Это связано с тем, что касательные напряжения не вызывают удлинения ребер параллелепипеда, а вызывают лишь изменения прямых углов между его гранями

$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y)$, $\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x)$.

Чистый сдвиг

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором в окрестностях данной точки k (рис. 5.5, а) можно выделить элементарный параллелепипед, по боковым граням которого действуют только касательные напряжения.

Посмотрим, как при чистом сдвиге изменяются напряжения в зависимости от ориентации секущих площадок. Для этого из элементарного кубика, находящегося в состоянии чистого сдвига, выделим трехгранную призму ABC (рис. 5.5, б).

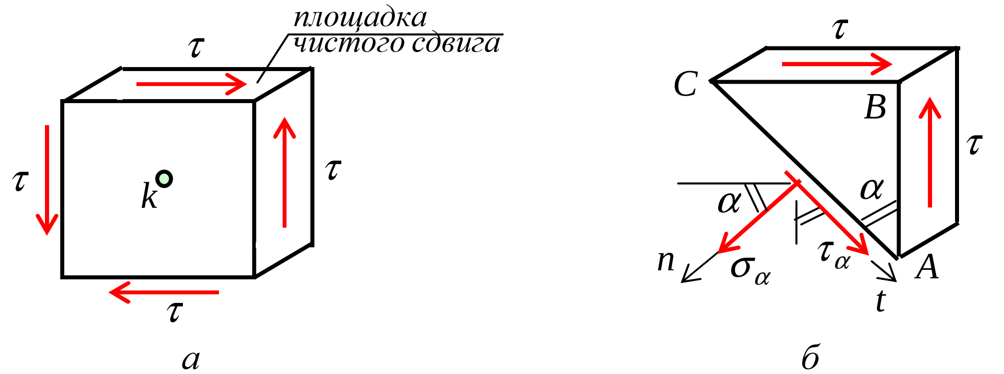

Рис. 5.5

На гранях AB и BC, по условию, действуют касательные напряжения τ. На грани AC в зависимости от угла α возможно возникновение как нормальных так и касательных напряжений (рис. 5.5, б).

С учетом $AB = AC \cdot \cos\alpha$ и $BC = AC \cdot \sin\alpha$, условия равновесия дают:

$\sum F_n = 0$, $\sigma_\alpha \cdot AC - \tau \cdot BC \cdot \cos\alpha - \tau \cdot AB \cdot \sin\alpha = 0$ или $\sigma_\alpha = \tau \cdot \sin 2\alpha$,

$\sum F_t = 0$, $\tau_\alpha \cdot AC + \tau \cdot BC \cdot \sin\alpha - \tau \cdot AB \cdot \cos\alpha = 0$ или $\tau_\alpha = \tau \cdot \cos 2\alpha$.

Отсюда видно, что $\sigma_\alpha^{\max} = \pm\tau$ при $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{4}$ ($\tau_\alpha = 0$, это главные площадки), $\tau_\alpha^{\max} = \tau$ при $\alpha = 0$ ($\sigma_\alpha = 0$, грань AB).

Следовательно, касательные напряжения, действующие по боковым граням параллелепипеда, являются экстремальными, а эти грани являются площадками сдвига и образуют с главными площадками углы, равные 45°.

Площадки сдвига отличаются от аналогичных площадок в общем случае напряженного состояния тем, что на них не действуют нормальные напряжения. В связи с этим их называют *площадками чистого сдвига*.

Заметим, что при чистом сдвиге, главные напряжения и экстремальные касательные напряжения по абсолютной величине равны друг другу – $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\tau$ (рис. 5.6, а).

Таким образом, чистый сдвиг может быть представлен как одновременное растяжение и сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям.

При чистом сдвиге полное напряжение p по любой площадке равно

$$p = \sqrt{\sigma_\alpha^2 + \tau_\alpha^2} = \tau.$$

Деформации при сдвиге

В состоянии чистого сдвига (рис. 5.6, б) длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями: первоначально прямые углы становятся равными $(90^\circ+\gamma)$ и $(90^\circ-\gamma)$. Каждая из граней параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани на величину BB_1, называемую *абсолютным сдвигом* (рис. 5.6, б).

Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями BC называется *относительным сдвигом*, при малых деформациях оно равно величине угла сдвига γ – изменения первоначально прямых углов между боковыми гранями параллелепипеда: $\dfrac{BB_1}{BC}=tg\gamma\approx\gamma$.

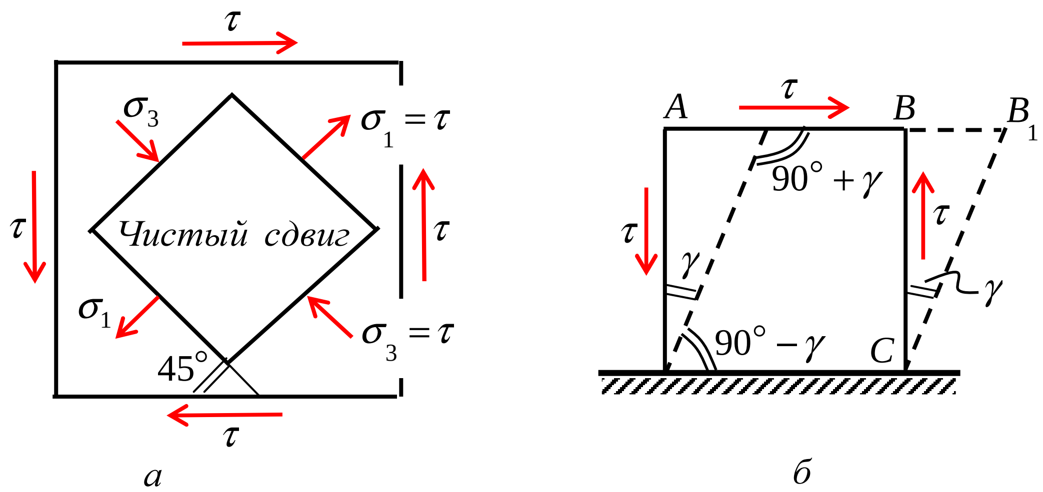

Рис. 5.6

Закон Гука при сдвиге

Величина γ, как показывает опыт, прямо пропорциональна величине касательных напряжений. Эта зависимость между γ и τ, называемая законом Гука при сдвиге, выражается в виде $\gamma=\tau/G$ или $\tau=\gamma\cdot G$.

Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига*, или *модулем упругости второго рода*.

Модуль сдвига является физической постоянной материала, характеризующей его жесткость (т. е. способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге, и может быть выражен через две независимые характеристики материала E и μ. Получим эту зависимость.

На рис. 5.7, а показан квадратный элемент $ABCD$, находящийся в состоянии чистого сдвига ($\sigma_1=\tau$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-\tau$). Относительную деформацию его диагонали BD, каждая частица которой находится в плоском напряженном состоянии (рис. 5.7, б), можно записать в виде

$$\varepsilon_1=\varepsilon_{11}+\varepsilon_{13}=\frac{\sigma_1}{E}-\mu\cdot\frac{\sigma_3}{E}=\frac{1}{E}\cdot(\sigma_1-\mu\cdot\sigma_3)=\frac{1}{E}\cdot(\tau-\mu\cdot(-\tau))=\frac{\tau}{E}\cdot(1+\mu).$$

С другой стороны $\gamma=\dfrac{BB_1}{BC}$, и чтобы правый конец диагонали BD (точка B) совместить с его конечным положением (точка B_1), надо диагональ BD

растянуть на величину BB_2 и повернуть по часовой стрелке по касательной B_2B_1 к радиусу DB_2 (рис. 5.7, а). Напомним, что при малых деформациях, перемещение по дуге окружности принято для линеаризации задачи заменять перемещением по касательной. В этом случае

$$\varepsilon_1 = \frac{BB_2}{BD} = \frac{BB_1 \cdot \cos 45^\circ}{BC \cdot \sqrt{2}} = \frac{BB_1}{BC} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Сравнивая оба полученных выражения для ε_1, получим

$$\frac{\tau}{E} \cdot (1+\mu) = \frac{\gamma}{2} \text{ или } \tau = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)} \cdot \gamma \text{ или } \tau = G \cdot \gamma \text{, где } G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)}.$$

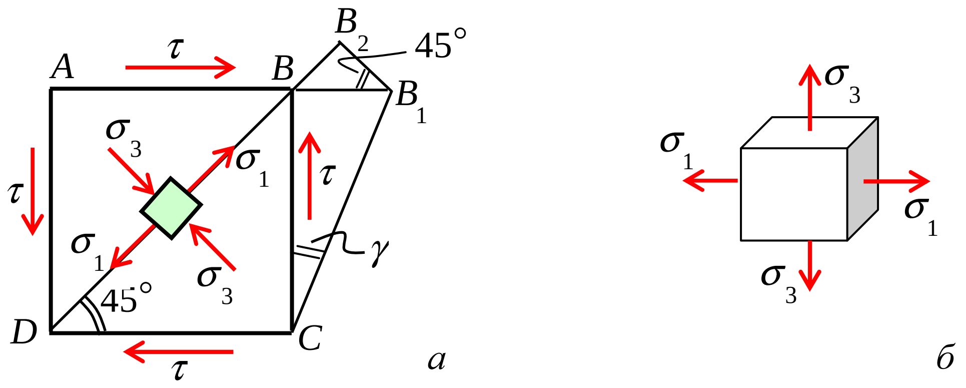

Рис. 5.7